Introducción

A lo largo de este tema, revisarás los distintos métodos de integración: por partes, por fracciones parciales, por sustitución trigonométrica y, finalmente, por integral definida.

Cada método tiene sus propias singularidades, las cuales examinarás para que puedas identificar las funciones de la integral y, con base en ellas, elegir el método necesario para la resolución correcta de la integral indefinida.

Explicación

Métodos de integración

El primer método de integración se sustenta en una multiplicación.

- Método de integración por partes. Consiste en la multiplicación de dos funciones diferentes: una original (u) y la otra derivada de otra función diferente dv (Araujo, 2018).

La fórmula para trabajar con el método de integración por partes es esta:

$$\int (u\,dv) = uv - \int vdu$$

Las funciones u y dv no siempre vienen en orden, así que debes encontrarlo. Para ello, cuentas con la estrategia LATE (Logarítmica, Algebraica, Trigonométrica y Exponencial), así que la primera representada a partir del orden LATE será la función u (Oteyza, Lam, Hernández y Carrillo 2019).

Observa el siguiente ejemplo de integración por partes. Se trata de una multiplicación de una función algebraica x^2 por una función logarítmica $\ln(x)$.

$$\int (x^2 sen(x))d(x) =$$

Selección de u a partir de LATE.

- Algebraica: x^2.
- Trigonométrica: $sen(x)$.

1. Al encontrar x^2, entonces será u; por tanto, $sen(x)$ será dv.

$$\int (2xsen(x))d(x) = uv - \int vdu$$

2. Como te habrás percatado, en la fórmula de integración por partes debes trabajar con u y du, así como con dv y v; por ende, u se deriva y dv se integra con el fin de tener todos los elementos de la fórmula.

$$u = 2x \longrightarrow du = 2$$
$$dv = sen(x) \longrightarrow v = -cos\,(x)$$

3. Utiliza el orden de la fórmula de integración por partes y coloca los componentes en el lugar que les corresponde.

$$\int (u\,dv) = uv - \int vdu$$

$$\int (2x\,sen(x))d(x) = 2x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)\ 2$$

$$\int (2x\,sen(x))d(x) = -2x\cos(x) - \int (-2cos(x))$$

4. Se integra la parte $\int \left(\begin{smallmatrix}-2co4\\(x\end{smallmatrix}\right))$. Puedes determinar la constante para solo integrar $\int (cos(x))$:

$$\int (2x\,sen(x))d(x) = -2x\cos(x) - (-2)\int (cos(x))$$

5. Multiplica los resultados.

$$\int (2x\,sen(x))d(x) = -2x\cos(x) + 2(sen(x))$$

$$\int (2x\,sen(x))d(x) = -2x\cos(x) + 2\big(sen(x)\big) + c$$

Examina el siguiente ejemplo.

¿Qué pasaría si tienes una $\int (\ln(x))d(x)$? En este caso, parece que solo cuentas con un $(\ln(x))$, pero no olvides que puedes hacer una pequeña modificación sin alterar la integral. Como el $\ln(x)$ es una función logarítmica que ya no se puede integrar, selecciona el método de integración por partes, pues contiene una función (u) y otra derivada dv, donde $u = \ln(x)$ y $dv = 1$.

La integración modificada quedaría de esta manera:

$$\int (1)(\ln(x))d(x)$$

¿Por qué se coloca el número 1? Porque es nulo en la multiplicación, por ejemplo, $3 * 1 = 3$. Esto significa que $(1)(\ln(x)) = (\ln(x))$, es decir, permite conservar la integral sin alterarla.

$$\int (u\,dv) = uv - \int vdu$$

$$\int (1)(\ln(x))d(x) = (\ln(x))(x) - \int (x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\int (1)(\ln(x))d(x) = (\ln(x))(x) - \int \frac{x}{x}$$

$$\int (1)(\ln(x))d(x) = (\ln(x))(x) - \int 1$$

$$x\ln(x) - x + c$$

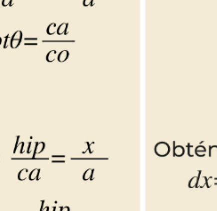
Integración por sustitución trigonométrica

La integración por sustitución trigonométrica se base en la semejanza entre el teorema de Pitágoras y alguna parte de la función que se quiere integrar.

$$ca = \sqrt{a^2 - x^2},\ co = \sqrt{x^2 - a^2},\ hip = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Examina este ejemplo.

Orden de una función de integración por sustitución trigonométrica

Integral por sustitución trigonométrica.	Ubicación de las variables en el triángulo.
$\int \frac{\sqrt{(x^2-8}}{x} d(x) =$ $hip = x$ $co = \sqrt{x^2-a^2}$ $ca = a$	

Explicación.	Funciones trigonométricas.	Selección de la función donde x se encuentra en el numerador.
Selecciona alguna función trigonométrica que te ayude a obtener el valor de x.	$sen\theta = \frac{co}{hip}$ $cos\theta = \frac{ca}{hip}$	Elección: $sec\theta = \frac{x}{a}$
Observa la ubicación de x en el triángulo y selecciona la función trigonométrica que contenga a x en el numerador y el valor de a en el denominador.	$tan\theta = \frac{co}{ca} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ $cot\theta = \frac{ca}{co}$	Despeja x: $x = asec\theta$
De igual manera, selecciona donde $\sqrt{x^2-a^2}$ esté en el numerador y a en el denominador.	$sec\theta = \frac{hip}{ca} = \frac{x}{a}$ $csc\theta = \frac{hip}{co}$	Obtén el valor de d(x): $dx = a\ sec\ \theta\ tan\ \theta d\theta$ El valor seleccionado para la raíz es este: $tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ Despeja el valor de: $\sqrt{x^2-a^2}$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\ tan\theta d\theta$

Tabla 1. Orden de una función de integración por sustitución trigonométrica.

De esta manera, selecciona el valor de cada uno de los casos para las raíces; en general, solo existe una de las tres opciones presentadas al inicio.

La tabla 2 muestra completos tanto el formulario de la selección de las funciones como los despejes. ¡Es un esquema listo para usarse! No dudes en consultarlo cuando el integrado de una función se base en raíces.

Integración por sustitución trigonométrica según el caso

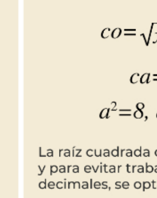
Raíz	Triángulo para utilizar	Fórmula de los lados	Fórmulas
$\sqrt{a^2-x^2}$		$hip = a$ $co = x$ $ca = \sqrt{a^2-x^2}$	$x = asen\theta$ $dx = acos\theta d\theta$ $\sqrt{a^2-x^2} = acos\theta d\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$		$hip = x$ $co = \sqrt{x^2-a^2}$ $ca = a$	$x = asen\theta$ $dx = a\ sec\ \theta\ tan\ \theta d\theta$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\ tan\theta d\theta$
$\sqrt{x^2+a^2}$		$hip = \sqrt{a^2+x^2}$ $co = x$ $ca = a$	$x = a\ tan\theta$ $dx = asec^2\ \theta d\theta$ $\sqrt{a^2+x^2} = a\ sec\theta d\theta$

Tabla 2. Tabla de integración por sustitución trigonométrica según el caso.

Examina los ejemplos que se presentan a continuación.

Ejemplo 1. En esta ocasión, tienes una $\sqrt{x^2 - a^2}$, así que debes seleccionar con especial atención las fórmulas necesarias para llevar a cabo la sustitución trigonométrica.

Función integradora	Selección de fórmulas	Fórmulas y su sustitución
$\int \frac{\sqrt{(x^2-8}}{x} d(x) =$	$hip = x$ $co = \sqrt{x^2-a^2}$ $ca = a$ $a^2 = 8,\ a = \sqrt{8}$ La raíz cuadrada de 8 no es exacta y para evitar trabajar con decimales, se opta por dejarla así. Raíz de 8: 2.8284	$x = \sqrt{8}\ sec\ \theta$ $dx = \sqrt{8}\ sec\ \theta\ tan\ \theta$ $\sqrt{x^2-8} = \sqrt{8}\ tan\ \theta$

Tabla 3. Función integradora con $\sqrt{x^2 - a^2}$.

A partir de los valores anteriores, sustituye los datos según corresponda.

$$x = \sqrt{8}\sec\theta$$

$$dx = \sqrt{8}\sec\theta\tan\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 8} = \sqrt{8}\tan\theta$$

Observa la integral y la sustitución:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x}\,d(x) = \int \frac{\sqrt{8}\tan\theta}{\sqrt{8}\sec\theta}\cdot\sqrt{8}\sec\theta\tan\theta =$$

De ser posible, reduce los valores semejantes. En este caso:

$$\int \frac{\sqrt{8}\tan\theta\cdot\cancel{\sqrt{8}\sec\theta}\tan\theta}{\cancel{\sqrt{8}\sec\theta}} = \int \sqrt{8}\tan^2\theta =$$

Encontrar la solución de una integral trigonométrica conlleva un procedimiento complejo, así que debes recurrir a identidades trigonométricas que te faciliten conseguir el resultado.

$$\int \sqrt{8}\tan^2\theta = \int \sqrt{8}\,(\sec^2\theta - 1)$$

Recuerda que las constantes pueden obtenerse de la integral para facilitar las operaciones; además, separan las integrales mientras se suman o restan.

$$\sqrt{8}\left(\int \sec^2\theta - \int 1\right) = \sqrt{8}\,(\tan\theta - \theta)$$

El resultado debe ser $\sqrt{8}\,(\tan\theta - \theta)$; sin embargo, está en función de θ, aunque la integral se dio en función de x. En estas situaciones, se cambia el resultado de acuerdo con las funciones trigonométricas:

$$\sqrt{8}\,(\tan\theta - \theta) + c$$

$$\tan\theta = \frac{co}{ca} = \frac{\sqrt{x^2-8}}{\sqrt{8}}$$

$$\theta = \frac{\cos x}{\sqrt{8}} = \cos\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)$$

$$\sqrt{8}\,(\tan\theta - \theta) + c\ =\ \sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{x^2-8}}{\sqrt{8}} - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)\right) + C$$

Por tanto, el resultado es $\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{x^2-8}}{\sqrt{8}} - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)\right) + c$, ya en función de x.

Integración por fracciones parciales

La integración por fracciones parciales implica una división de dos funciones, donde el numerador contiene un exponente menor al del denominador y el numerador no debe ser derivada del denominador.

En la tabla 4, se presentan las fórmulas de integración por fracciones parciales, de acuerdo con el tipo de denominador.

Tipo de fracción	Fórmula
Cuando el denominador es factorizado y las factorizaciones quedan como exponente 1.	$\frac{Px}{(x+a)(x+b)...(x+w)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + ... + \frac{Z}{x+w}$
Cuando el denominador es factorizado y las factorizaciones quedan como exponente 2.	$\frac{Px}{(x+a)^n} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+a)^2} + ... + \frac{Z}{(x+a)^n}$
Cuando el denominador es factorizado y las factorizaciones quedan como polinomio por binomio con exponente 1.	$\frac{Px}{(x^2+bx+c)(x^2+d)} = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)} + \frac{Cx+D}{(x^2+d)}$
Cuando el denominador es factorizado y las factorizaciones quedan como polinomio por binomio con exponente 2.	$\frac{Px}{(x2+bx+c)^n} = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)} + \frac{Cx+D}{(x2+bx+c)^2} + ... + \frac{Cx+D}{(x^2+bx+c)^2}$

Tabla 4. Tipos de integrales por fracciones parciales y sus fórmulas.

Observa el siguiente ejercicio de integración por fracciones parciales:

$$\int \left(\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)}\right)\boldsymbol{d(x)}$$

Al separar las fracciones, debes considerar la relación del exponente de x con la cantidad de letras que están en el numerador.

$$\int \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Puedes resolver las multiplicaciones por ecuaciones simultáneas o igualación de términos:

$$2x^2 - x + 4 =$$

$$A(x^2+4) + x(Bx + C) =$$

$$Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$2x^2 = Ax^2 + Bx^2$$

$$-x = Cx$$

$$4 = 4A$$

$$A = \frac{4}{4}$$

$$2 = A + B$$

$$B = 1$$

$$C = -1$$

$$A = 1$$

Se sustituyen las letras A, B y C en la integral para después resolverlas.

$$\int \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}$$

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x-1}{x^2+4}dx$$

De esta forma, es más sencillo realizar la integración.

$$ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Cierre

Cada integral posee ciertas características que permiten seleccionar un método de integración, por ejemplo, la multiplicación de dos funciones diferentes. Una es una función original (u) y la otra una derivada de una función diferente dv; se trata, por tanto, de una integración por partes. Por su lado, la integración por sustitución trigonométrica se basa en la semejanza con el teorema de Pitágoras; mientras tanto, la integración por fracciones parciales implica una división de dos funciones, donde el numerador debe contener un exponente menor al del denominador, además de que el numerador no debe ser derivada del denominador.

Checkpoint

Asegúrate de:

- Comprender las diferencias entre cada método para seleccionar la forma correcta y resolver la integral.
- Identificar las características de $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$ y $\sqrt{a^2 - x^2}$ para seleccionar de forma correcta las fórmulas de cada caso en la sustitución trigonométrica.

Bibliografía

- Araujo, F. (2018). *Cálculo integral.*Ecuador: Universitaria Politécnica Salesiana.
- Oteyza, M., Lam, E., Hernández, C., y Carrillo, A. (2019). *Calculo Diferencial e Integral* (2ª ed.). México: Pearson.